随机过程

数字特征

一般随机过程

特征	公式
均值函数	$m_x(t) = EX(t)$
方差函数	$D_x(t) = E[(X(t) - EX(t))^2]$
自协方差函数	$C_x(s,t) = E[(X(s) - EX(s))(X(t) - EX(t)]$
自相关函数	$R_x(s,t) = EX(s)X(t)$
互相关函数	$R_{xy}(s,t) = E[X(s)Y(t)]$

泊松过程

> $N(t) \sim p(\lambda t)$，参数为λ

特征	公式
均值函数	$m_N(t) = EN(t) = \lambda t$
自协方差函数	$C_N(s,t) = \lambda min\{s,t\}$
方差函数	$D_N(t) = C_N(t,t) = \lambda t$

$\lambda = \frac{E[X(t)]}{t}$

维纳过程

> $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$服从均值为0，方差为$\sigma^2 t$的正态分布，其中$\sigma^2$称为维纳过程的参数

特征	公式
均值函数	$m_w(t) = EW(t) = 0$
自协方差函数	$C_w(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$
方差函数	$D_W(t) = C_w(t,t) = \sigma^2 t$
自相关函数	$R_w(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$

正态过程

> 正态过程的证明
>
> - 对于随机过程$X(t)$，将各个时刻$t_0, t_1 \dots t_n$带入，形成一个随机向量$[X(t_0), X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)]^T$，证明这个随机向量是一个正态随机向量$B^T$的线性变换即可，即存在**常数矩阵**$C$，使得$[[X(t_0), X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)]^T = C \cdot B^T$
> - 则，随机向量$[X(t_0), X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)]^T$服从$n$维正态分布
> - 推出，$X(t)$为正态过程

- **例题：设随机过程**$\{X(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt), t \geq 0\}$，**其中**$A$,$B$**为相互独立的随机变量，且服从**$N(0, \sigma^2)$，$w$**为正常数，证明**$X(t)$**为正态过程**

由于A, B是独立同分布的正态随机变量，则有随机向量，服从二维正态分布

$$(A, B)^T \sim N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}cov(A,A) & cov(A,B)\\ cov(B,A) & cov(B,B)\end{pmatrix}\right)$$

由A, B相互独立，则

$$(A, B)^T \sim N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma 2\end{pmatrix}\right)$$
$$\text{令} \quad I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$\text{则} \quad (A, B)^T \sim N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \sigma^2 I_2\right)$$

将$t_0, t_1, \dots t_n$带入$X(t)$，得到

$$X(t_0) = A\cos(wt_0) + B\sin(wt_0)$$
$$X(t_1) = A\cos(wt_0) + B\sin(wt_1)$$
$$\dots$$

显然，可整了成以下形式

$$\begin{pmatrix}X(t_0)\\ X(t_1)\\ \vdots\\ X(t_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t_0) & \sin(\omega t_0)\\ \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1)\\ \vdots & \\ \cos(\omega t_n) & \sin(\omega t_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$$

即存在从二维正态随机向量$(A\ B)^T$到随机向量$[X(t_0),X(t_1)X(t_2)...X(t_n)]^T$的线性变换

`->` $[X(t_0),X(t_1)X(t_2)...X(t_n)]^T$服从$n$维正态分布

`->` $X(t)$为正态过程

均方微积分

均方可导

> 均方可导 等价于 均方可微

广义二阶导数

> **若二元函数$f(s,t)$在(s,t)处满足极限：**
>
> $$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta s\to 0}}\frac{f(s+\Delta s,t+\Delta t)-f(s+\Delta s,t)-f(s,t+\Delta t)+f(s,t)}{\Delta t\Delta s}$$
>
> `存在` **则称，二元函数$f(s,t)$在(s,t)处广义二阶可导，记作**
>
> $$\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\partial t}$$

均方可微（可导）准则

判别充要条件

> **随机过程$X(t),t\in T$在$t_0\in T$处均方可微（可导） $\leftarrow$ 充要 $\rightarrow$ 自相关函数$R_x(s,t)$在(t_0,t_0)处二阶可微**

> **固定写法：**

对于任意的$t>0$，$0<h'<h$，计算关于自相关函数的极限：

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h'\to 0}}\frac{R_X(t+h,t+h')-R_X(t+h,t)-R_X(t,t+h')+R_X(t,t)}{hh'}$$

根据极限是否存在确定随机过程的均方可导性：

- 极限存在——均方可导
- 极限不存在——均方不可导

均方连续

> 可导必连续，和高数一样

均方可积

均方可积准则

> 随机过程$\{X(t), t \in [a,b]\}$，对每一个$\mu \in U$，$f(t,u)$是关于t的黎曼可积函数，如果$f(t,u)X(t)$的**自相关函数**在$[a,b] \times [a,b]$上的二重积分$\int_a^b \int_a^b f(s,u)f(t,u)EX(s)EX(t)dsdt$存在，且有限，则$f(t,u)X(t)$在$[a,b]$上均方可积

> 若$X(t)$在$[a,b]$上**均方连续**，则$X(t)$在$[a,b]$上**均方可积**

马尔科夫链

转移概率

> 从状态i到状态j通过n步到达的概率

变量	表达式
一步转移概率	$p_{ij}(1) = p_{ij}$
n步转移概率	$p_{ij}(n)$

转移概率矩阵

> 矩阵任意一行的行和等于1

一步转移概率矩阵

$$p(1) = p = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

k步转移概率矩阵

$$p(k)=\begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{pmatrix}$$

> k步转移概率矩阵，等于一步转移概率矩阵的k次方

$$p(k)=p^k=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^k$$

可达、互通、闭集、不可约

名词	含义
可达	从i到j的转移概率不是0，就是说能从i到j
互通	i能到j，j也能到i，就叫他俩互通
闭集	有几个状态，只能从外面进来，进来了就出不去，那么这几个状态就是闭集 状态转移图上可以轻松的看出来
不可约	所有状态加起来是一个闭集，里面再没有小闭集，那么这个马氏链称为不可约

状态转移图

> 根据转移矩阵，画转移图，根据一个一个转移概率画就可以了

首达概率|迟早达概率|首次返回概率|迟早返回概率|平均返回时间

变量	表达式	含义
首达概率	$f_{ij}(n)$	走n步第一次从i到达j状态的概率
迟早达概率	$f_{ij}=\sum_{i=1}^{n}f_{ij}(n)$	迟早从i到j的概率，等于走1,2,3...n步首达概率的总和
首次返回概率	$f_{ii}(n)$	走n步第一次从i出发又回到i状态的概率
最终返回概率	$f_{ii}=\sum_{i=1}^{n}f_{ii}(n)$	迟早从i到i的概率，等于走1,2,3...n步返回i概率的总和
平均返回时间	$\mu_i=\mu_{ii}=\sum_{i=1}^{n}nf_{ii}(n)$	从i出发最终返回i需要的平均时间，等于各部署首次返回概率 **乘以** 响应走的部署n

周期

> 用d_i标示

$$d_i=G.C.D\{n\}$$

其中 `GCD` 表示最大公约数，就是各个状态转移步数 `n` 的最大公约数

> **在分析周期时，是选定某一个状态来看的**
>
> - **如果存在一个状态，能自己直接到自己，那么马氏链就是非周期的**
> - 在比如，某个状态，它总是要走2步，4步，6步回到自己，那么最大公约数就是2，2就是周期，周期就是2

状态分类

> 用最终返回概率和平均返回时间来判定

状态	判别依据
常反态	$f_{ii}=1$，最终返回概率等于1
正常返态	$f_{ii}=1$，且，$u_i<\infty$，最终返回概率等于1，平均返回时间不是无穷
零常返态	$f_{ii}=1$，且，$u_i=\infty$，最终返回概率等于1，平均返回时间是无穷
非常返态	$f_{ii}<1$，最终返回概率小于1

还有几个公式，看不太懂，不好记，而且我看三年考试题都没考过，心虚的话去看咱学校视频，我就不写了

以上周期，状态，在互通的状态之间互相传播

以上周期，状态，在互通的状态之间互相传播

以上周期，状态，在互通的状态之间互相传播

以上周期，状态，在互通的状态之间互相传播

以上周期，状态，在互通的状态之间互相传播

以上周期，状态，在互通的状态之间互相传播

平稳分布

> 以2个状态的情况为例子，3，4，5...个状态的以此类推

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

> **根据这个方程组，解出π_i即可**

重要快速判别式

> 1. 不可约的有限状态马尔科夫链都是正常返态
> 2. **不可约非周期马尔可夫链是正常返态 ← 充要 → 存在平稳分布，且平稳分布就是极限分布$\{\frac{1}{u_i}\}$，平均返回时间的倒数，即$\pi_1 = \frac{1}{u_1}$，以此类推**

遍历性

快速判别式

遍历必 非周期

> 1. 非周期的，全互通的马尔科夫链 -> 具有遍历性

2. 不可约的+非周期+正常返态的马尔科夫链 -> 具有遍历性
3. 马尔科夫链的**任意步转移矩阵，只要有其中一个转移矩阵元素全不为0，则马尔科夫链具有遍历性**（所有状态在某一步都可以到达，就是遍历了）
4. 根据3，如果马尔科夫链的所有步转移概率矩阵都含有0，那么就没有遍历性